

BAREM DE CORECTARE
CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

CLASA A XII-A
etapa locală – februarie 2016

Filiera teoretică – Profilul real – Specializarea Științe ale Naturii

SUBIECTUL I

a) Calculează $(x*y)*z = a^2xyz + abxz + abyz + acz + abxy + b^2x + b^2y + bz + bc + c$ Calculează $x*(y*z) = a^2xyz + abxy + abxz + acx + bx + abyz + b^2y + b^2z + bc + c$ Din $(x*y)*z = x*(y*z)$, $(\forall) x, y, z \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (z - x)(ac + b - b^2) = 0$, $(\forall) x, z \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow ac + b - b^2 = 0$	1p 1p 1p
b) Conform a) $a \cdot c + b - b^2 = 0$ Există $e \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x*e = e*x = x$, $(\forall) x \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow axe + b(x+e) + c = x$, $(\forall) x \in \mathbb{Z}$ Din identificarea coeficienților se obține $ae + b = 1$ și $be + c = 0$ $\Rightarrow e = -\frac{c}{b} \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0 \Rightarrow b/c$	1p 1p
c) $x*y = x \cdot y - (x+y) + 2$, $(\forall) x, y \in \mathbb{Z}$ Fie $x \in \mathbb{Z}$ astfel încât există $x' \in \mathbb{Z}$: $x*x' = x'*x = 2 \Rightarrow x' = \frac{x}{x-1} \in \mathbb{Z}$, unde $x \neq 1$ Determină $x \in \{0, 2\}$	1p 1p

SUBIECTUL II

a) Calculează $A \cdot B = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} zu - w\bar{v} & zv + w\bar{u} \\ -\bar{w}u - \bar{z}\bar{v} & -\bar{w}v + \bar{z}\bar{u} \end{pmatrix}$ $A \cdot B = \begin{pmatrix} zu - w\bar{v} & zv + w\bar{u} \\ -(\bar{z}v + w\bar{u}) & zu - w\bar{v} \end{pmatrix}$ $\text{Det}(A) = z ^2 + w ^2 \neq 0$, analog $\text{det}(B) \neq 0 \Rightarrow \text{det}(A \cdot B) \neq 0 \Rightarrow M$ este parte stabilă	1p 1p
b) Înmulțirea matricelor este asociativă Justifică $I_2 \in M$ element neutru Determină simetricul lui $A = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \in M$ ca fiind $A^{-1} = \frac{1}{\text{det}(A)} \cdot \begin{pmatrix} \bar{z} & -w \\ \bar{w} & z \end{pmatrix} \in M$	1p 1p
c) f morfism \Leftrightarrow $f((a+bi) \cdot (c+di)) = f(a+bi) \cdot f(c+di)$, $(\forall) (a+bi), (c+di) \in \mathbb{C}$ Calculează $f((a+bi) \cdot (c+di)) = f((ac-bd) + i(ad+bc))$ $= \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(bc+ad) & ac-bd \end{pmatrix}$	1p 1p 1p

$$f(a + bi) \cdot f(c + di) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -(bc + ad) & -bd + ac \end{pmatrix}$$

SUBIECTUL III

$a) G'(x) = (\ln(xe^x + x \ln x + x))' = \frac{(xe^x + x \ln x + x)'}{(xe^x + x \ln x + x)} = \frac{x \cdot e^x + e^x + \ln x + 2}{x \cdot (e^x + \ln x + 1)} = g(x), (\forall) x \in (1, \infty)$ $\Rightarrow G$ primitivă a funcției g	1p
$b) \int f(x) dx = \int \frac{2 \cdot x \cdot e^x + x \cdot \ln x + x + 1}{x \cdot (e^x + \ln x + 1)} dx = \int \frac{x \cdot e^x + x \cdot \ln x + x}{x \cdot (e^x + \ln x + 1)} + \frac{x \cdot e^x + 1}{x \cdot (e^x + \ln x + 1)} dx =$ $\int 1 dx + \int \frac{x \cdot e^x + 1}{x \cdot (e^x + \ln x + 1)} dx = x + \int \frac{x \cdot e^x + e^x + \ln x + 2}{x \cdot (e^x + \ln x + 1)} dx - \int \frac{e^x + \ln x + 1}{x \cdot (e^x + \ln x + 1)} dx =$ $x + \ln(x \cdot (e^x + \ln x + 1)) - \ln x + C$	1p 1p 1p
$c) \text{Fie } F \text{ o primitivă a funcției } f \text{ pe intervalul } (1, \infty)$ $\Rightarrow F'(x) = f(x), (\forall) x \in (1, \infty)$ $f(x) > 0, (\forall) x \in (1, \infty) \Rightarrow F'(x) > 0, (\forall) x \in (1, \infty)$ F este crescătoare pe $(1, \infty)$.	1p 1p

SUBIECTUL IV

$a) l_s(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x^2 + 1) = 0$ $l_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0} a^x - 1 = 0$ $f(0) = 0 \Rightarrow l_s(0) = l_d(0) = f(0) \Rightarrow f$ continuă în 0 Justifică f continuă pe \mathbf{R} $\Rightarrow f$ admite primitive pe \mathbf{R}	1p 1p
$b) \text{Determină o primitivă } F: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \text{ calculând mai întâi primitivele funcției } f \text{ pe}$ $\text{submulțimile lui } \mathbf{R}, (-\infty, 0), \text{ respectiv } [0, \infty).$ $\int \ln(x^2 + 1) dx = x \cdot \ln(x^2 + 1) - \int \frac{2x^2}{x^2 + 1} dx = x \cdot \ln(x^2 + 1) - 2x + 2 \arctg x + C$ $\int a^x - 1 dx = \frac{a^x}{\ln a} - x + C$ $F(x) = \begin{cases} x \cdot \ln(x^2 + 1) - 2x + 2 \arctg x + c_1, & x < 0 \\ \frac{a^x}{\ln a} - x + c_2, & x \geq 0 \end{cases}$ Din condiția de continuitate a primitivei F în punctul $x=0$, rezultă:	1p 1p 1p

$F(x) = \begin{cases} x \cdot \ln(x^2 + 1) - 2x + 2 \operatorname{arctg} x + \frac{1}{\ln a} + c, & x < 0 \\ \frac{a^x}{\ln a} - x + c, & x \geq 0 \end{cases}$	
<p>c) Fie F o primitivă a funcției f pe $(0, \infty)$</p> <p>$\Rightarrow F'(x) = f(x), (\forall) x \in (0, \infty)$</p> <p>$\Rightarrow F''(x) = f'(x) = a^x \cdot \ln a > 0, (\forall) x \in (0, \infty), \text{ pentru } a \in (1, \infty)$</p> <p>$\Rightarrow F''(x) > 0, (\forall) x \in (0, \infty) \Rightarrow F$ convexă pe $(0, \infty)$</p>	<p>1p</p> <p>1p</p>